MATEMÁTICA DISCRETA II

EJERCICIO 1 (16 ptos.)

A) Sea G un grafo simple de 10 vértices tal que el grado de cada vértice es al menos 6 y el número de aristas es múltiplo de 15. Halla el número de aristas de G.

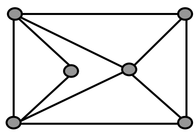
B) ¿Cuál es el árbol etiquetado cuyo código de Prüfer es $C = [3, 1, 3, 7, 7, 5, 2, 8]$?

Escribe su sucesión de grados.

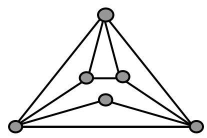
C) Prueba que si un grafo simple G es isomorfo a su complementario G', entonces el número de vértices de G es $4k$ o $4k + 1$, para algún $k \in \mathbb{N}$.

D) Un departamento de una empresa tiene establecidas dos redes locales de comunicación entre sus terminales cuyas líneas de conexión están esquematizadas en los siguientes grafos:

Red I



Red II

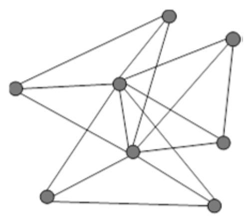


Analiza si los grafos que representan las redes I y II son isomorfos.

E) Sea G un grafo simple con $2n$ vértices y $M = \begin{pmatrix} N & P \\ P & Q \end{pmatrix}$ la matriz de adyacencia de G, con N, P, Q matrices de orden $n \times n$. Si G es conexo y la suma de las entradas de M es $2n-2$, ¿G es un árbol? ¿G tiene ciclos?

F) Sea G un grafo conexo, ¿cuál es la relación existente entre la conectividad $\kappa(G)$, la conectividad de aristas $\lambda(G)$ y $\delta(G) = mín.\{ \delta(v), v \in V \}$?

Halla $\kappa(G)$, $\lambda(G)$ y $\delta(G)$ en el grafo de la figura.



SOLUCIÓN

A) El grafo tiene $n = 10$ vértices, $q = 15\,k$ aristas y para cada vértice v se tiene que $6 \le \delta(v) \le 9$

$\Rightarrow 6.10 \le \sum \delta(v) = 2q \le 9.10 \;\Rightarrow q = 30, q = 45.$

B) Las aristas del árbol son $A_T = \{3\text{-}4, 1\text{-}6, 3\text{-}1, 7\text{-}3, 7\text{-}9, 5\text{-}7, 2\text{-}5, 8\text{-}2, 8\text{-}10\}$ y la sucesión de grados es $d = [2, 2, 3, 1, 2, 1, 3, 2, 1, 1]$.

C) Sea n = número de vértices de G = número de vértices de G'

Sean q = número de aristas de G, $\quad q' = \binom{n}{2} - q =$ número de aristas de G'

Si G es isomorfo a G', entonces $q = \binom{n}{2} - q \Longrightarrow 4q = n(n-1) \Longrightarrow 4|n(n-1) \Longrightarrow \begin{cases} 4|n \\ 4|n-1 \end{cases}$

D) SI son isomorfos, el complementario de ambos grafos es el mismo árbol.

E) Si G es conexo y card $V = 2n$, entonces el número de aristas de G es $q \ge 2n-1$, luego la suma de las entradas de M es $\sum \delta(v) = 2q \ge 2(2n-1) = 4n-2$, por lo que la suma de las entradas de M no es $2n-2$.

Si la suma de las entradas de M es $2n-2$ entonces G no es conexo, por tanto G no es árbol y puede tener ciclos.

MATEMÁTICA DISCRETA II

F) Se verifica que $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.

Si G es k-conexo entonces $k \leq \kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G) = 3$.

El grafo es 2-conexo y no es 3-conexo (eliminando los dos vértices de grado 7 se pierde la conexión.

El grafo es 3–aristoconexo (eliminando dos aristas no se pierde la conexión).

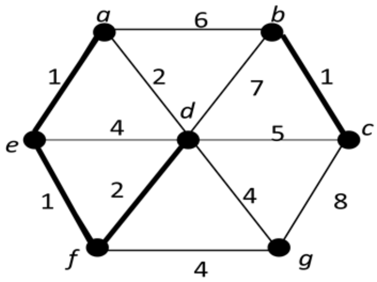
EJERCICIO 2 (12 ptos.)

En el grafo ponderado de la figura aparece el mapa de carreteras de Muchagua, región en la que se han producido graves inundaciones que han cortado todas las carreteras. La etiqueta de cada tramo indica el número de horas de trabajo que son necesarias para dejar apto para la circulación ese tramo. Los recursos disponibles son limitados por lo que se decide trabajar sólo en los tramos que garanticen la comunicación entre todas las poblaciones.

A) ¿Qué algoritmos seguirías para minimizar el número total de horas trabajadas?

Se han aplicado varias iteraciones de uno de los algoritmos válidos, ¿cuál es el algoritmo aplicado?

Completa la ejecución del algoritmo dando sus estructuras. ¿Cuántas horas de trabajo se necesitan como mínimo?



B) La duración estimada del viaje directo entre cada dos de los pueblos de la región viene dada por la tabla adjunta. ¿En qué pueblos podría situarse un centro de emergencias de forma que la duración del viaje entre el centro y cualquier otro pueblo sea lo más corta posible?

	a	b	c	d	e	f	g	h
a		3	4	5	6	3	4	2
b	3		5	5	9	6	5	2
c	4	5		1	5	4	2	2
d	5	5	1		4	3	1	4
e	6	9	5	4		3	5	8
f	3	6	4	3	3		2	5
g	4	5	2	1	5	2		3
h	2	2	2	4	8	5	3	

SOLUCIÓN

A) Para minimizar el número total de horas trabajadas se pueden utilizar los algoritmos de Kruskal o de Prim, ya que las aristas no tienen pesos distintos.
En este caso se han aplicado varias iteraciones del algoritmo de Kruskal, ya que el resultado de dichas iteraciones no es conexo.
Completamos la ejecución del algoritmo con la tabla de las componentes conexas de las aristas:

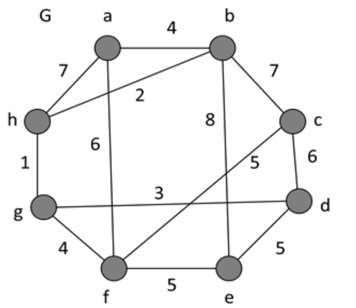
MATEMÁTICA DISCRETA II

a	b	c	d	e	f	g	arista
1	2	3	4	5	6	7	
1	2	3	4	1	6	7	ae
1	2	3	4	1	1	7	ef
1	2	2	4	1	1	7	bc
1	2	2	1	1	1	7	df
1	**2**	**2**	**1**	**1**	**1**	**1**	**dg**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**dc**

B) Sea V = [a, b, c, d, e, f, g. h] el conjunto de vértices de *G*, entonces las excentricidades de los vértices son E(*G*) = [6, 9, 5, 5, 9, 6, 5, 8] y el centro de *G* es el subgrafo generado por {c, d, g}.

EJERCICIO 3 (12 ptos.)

A) En la ciudad *G* se ha diseñado un recorrido turístico que conecta los 8 lugares de mayor importancia de la capital: {a, b, c, d, e, f, g, h}. Las conexiones entre los mismos y el tiempo en minutos que es necesario para desplazarse de un lugar a otro vienen dados por la figura adjunta.



Juan desea desplazarse desde la plaza **a** hasta la plaza **d**, por el camino más rápido. Halla una solución a este problema, estudiando si es o no única.

B) El alcalde de la ciudad *G* ha decidido darle sentido único a todas las calles del recorrido turístico anterior. Ayuda al alcalde a orientar las calles, tomando como vértice inicial la plaza **a**, de manera que desde cualquier punto se pueda acceder a cualquier otro.

SOLUCIÓN

A) El algoritmo que se debe aplicar es el de Dijkstra, ya que proporciona el camino mínimo entre dos vértices y se puede aplicar porque las aristas no tienen pesos negativos.

		Distancias							
S	Q	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**
{a,…,h}	{}	**0**	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
{b,…,h}	{a}		**4**	∞	∞	∞	6	∞	7
{c,…,h}	{a, b}			11	∞	12	**6**	∞	6
{c, d, e, g, h}	{a, b, f}			11	∞	11		10	**6**
{c, d, e, g}	{a, b, f, h}			11		11		**7**	
{c, d, e}	{a, b, f, h, g}			11	**10**	11			

El camino es *C* = [a-b-h-g-d] y la distancia desde **a** hasta **d** es 10.

B) Utilizando el algoritmo de orientación de las aristas de un grafo se obtiene el digrafo siguiente

MATEMÁTICA DISCRETA II